II.Худенко В.Н. Об основном объекте (n-I)-мерного многообразия субквадратичных элементов.-В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.6,Калининград, 1975,с.222-227.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.8 1977

УДК 513.73

Ю.И.Шевченко

ОБ ОСНАЩЕНИЯХ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Известно,что поверхность в многомерном проективном пространстве можно рассматривать с двух точек зрения: I/как многообразие точек (0-мерных плоскостей);2/как голономное многообразие центрированных плоскостей.Если соприкасающаяся плоскость не заполняет всего пространства, то возможна третья точка зрения на поверхность как специальное многообразие пар плоскостей,одна из которых играет роль касательной плоскости,а другая-роль соприкасающейся плоскости.В каждом из трех случаев с поверхностью ассоциируется некоторое главное расслоение.Показано,что оснащение Бортолотти,нормализация Нордена и обобщенная нормализация (введенная в работе) позволяют задавать связности в соответствующих ассоциированных расслоениях.

Работа выполнена методом продолжений и охватов Г.Ф. Лаптева.

§ I. Оснащение Бортолотти

Отнесем N-мерное проективное пространство P_N к подвижному реперу $\{A_{\mathcal{Y}}\}$,инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA_{\mathcal{J}'}=\Theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}A_{\mathcal{K}'}\quad(\mathcal{I}',\mathcal{J}',\mathcal{K}'=0,1,\dots,N),$$

причем формы Пфаффа $\Theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$\mathcal{D}\Theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{K}'}=\Theta_{\mathcal{J}'}^{\mathcal{I}'}\wedge\Theta_{\mathcal{I}'}^{\mathcal{K}'}.$$

В качестве инвариантных форм проективной группы $GP(N,R)$ будем рассматривать формы $\omega_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{J}'}=\Theta_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{J}'}-\delta_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{J}'}\Theta_0^0$, которые удовлетворяют структурным уравнениям [1],[2]:

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{J}'}=\omega_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{I}'}\wedge\omega_{\mathcal{I}'}^{\mathcal{J}'}-\delta_{\mathcal{K}'}^{\mathcal{J}'}\omega^{\mathcal{I}}\wedge\omega_{\mathcal{I}},$$

где

$$\omega^{\mathcal{I}}=\omega_0^{\mathcal{I}},\quad\omega_{\mathcal{J}}=\omega_{\mathcal{J}}^0\quad(\mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K}=1,\dots,N).$$

В проективном пространстве P_N рассмотрим n-мерную поверхность X_n $(1\le n<N)$ как n-мерное многообразие точек. Произведем специализацию подвижного репера $R_0=\{A_0,A_{\mathcal{I}}\}$, совмещая вершину A_0 с точкой, описывающей поверхность X_n. Репер R_0 является репером нулевого порядка. Система дифференциальных уравнений поверхности X_n в репере R_0 имеет вид:

$$\omega^a=\Lambda_i^a\omega^i,$$

где $i,j,k,l=1,\dots,n;\quad a,b,c=n+1,\dots,N.$

Продолжая эту систему уравнений, получим

$$\overline{\nabla}\Lambda_{(i)}^a+\omega_i^a=\Lambda_{ij}^a\omega^j,$$

причем дифференциальный оператор $\overline{\nabla}$ действует следующим образом:

$$\overline{\nabla}\Lambda_{(i)}^a=d\Lambda_i^a-\Lambda_j^a\overline{\omega}_i^j+\Lambda_i^b\omega_b^a\quad(\overline{\omega}_i^j=\omega_i^j-\Lambda_i^a\omega_a^j).$$

Функции Λ_i^a образуют фундаментальный объект первого порядка. С поверхностью X_n в репере R_0 ассоциируется главное расслоение $G_0(X_n)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\omega^i=\omega^j\wedge\overline{\omega}_j^i,$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}=\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}\wedge\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}}+\omega^i\wedge\omega_{\mathcal{K}i}^{\mathcal{I}},$$

$$\mathcal{D}\omega_{\mathcal{I}}=\omega_{\mathcal{I}}^{\mathcal{K}}\wedge\omega_{\mathcal{K}},$$

где

$$\omega_{\mathcal{K}i}^{\mathcal{I}}=-\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}}(\omega_i+\Lambda_i^a\omega_a)-\omega_{\mathcal{K}}(\Delta_i^{\mathcal{I}}+\Delta_a^{\mathcal{I}}\Lambda_i^a),$$

причем обобщенный символ Кронекера $\Delta_i^{\mathcal{I}}$ совпадает с символом Кронекера δ_i^j, когда индекс $\mathcal{I}$ принимает значения индекса j, и равен нулю, когда индекс $\mathcal{I}$ принимает значения индекса a.

Базой главного расслоения $G_0(X_n)$ является поверхность X_n, а типовым слоем – подгруппа стационарности точки A_0. Такое главное расслоение называют [11] расслоением центропроективных (коаффинных) реперов.

Связность в главном расслоении $G_0(X_n)$ задается [3],[4] с помощью поля объекта связности $\Gamma=(\Gamma_{\mathcal{K}i}^{\mathcal{I}},\Gamma_{\mathcal{I}i})$ на базе X_n:

$$\overline{\nabla}\Gamma_{\mathcal{K}(i)}^{\mathcal{I}}+\omega_{\mathcal{K}i}^{\mathcal{I}}=\Gamma_{\mathcal{K}ij}^{\mathcal{I}}\omega^j,$$

$$\overline{\nabla}\Gamma_{\mathcal{I}(i)}+\Gamma_{\mathcal{I}i}^{\mathcal{K}}\omega_{\mathcal{K}}=\Gamma_{\mathcal{I}ij}\omega^j.$$

Т е о р е м а. Для задания связности в ассоциированном расслоении $G_0(X_n)$ достаточно произвести оснащение Бортолотти [12] поверхности X_n, т.е. к каждой точке поверхности присоединить гиперплоскость P_{N-1}, не проходящую через эту точку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Гиперплоскость P_{N-1} зададим уравнением
$$x^0 - \lambda_{\mathcal{J}} x^{\mathcal{J}} = 0,$$
причем
$$\nabla \lambda_{\mathcal{J}} + \omega_{\mathcal{J}}^0 = \lambda_{\mathcal{J}i}\, \omega^i,$$
где дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом:
$$\nabla \lambda_{\mathcal{J}} = d\lambda_{\mathcal{J}} - \lambda_{\mathcal{K}}\, \omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{K}}.$$

Оснащение Бортолотти задается полем квазитензора $\lambda_{\mathcal{J}}$ на базе X_n. Фундаментальный объект первого порядка Λ_i^a и оснащающий квазитензор $\lambda_{\mathcal{J}} = (\lambda_i, \lambda_a)$ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:
$$\Gamma_{\mathcal{K}i}^{\mathcal{J}} = -\delta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{J}}(\lambda_i + \Lambda_i^a \lambda_a) - \lambda_{\mathcal{K}}(\Delta_i^{\mathcal{J}} + \Delta_a^{\mathcal{J}} \Lambda_i^a),$$
$$\Gamma_{\mathcal{J}i} = -\lambda_{\mathcal{J}}(\lambda_i + \Lambda_i^a \lambda_a),$$
что и требовалось доказать.

§ 2. Нормализация Нордена

В проективном пространстве P_N рассмотрим [I,с.353] поверхность X_n как n-мерное многообразие n-мерных центрированных плоскостей T_n, обладающее свойствами: а/центр плоскости T_n описывает n-мерное многообразие; б/первая дифференциальная окрестность центра плоскости T_n принадлежит этой же плоскости. Произведем специализацию подвижного репера $R_1 = \{A_0, A_i, A_a\}$, помещая вершину A_0 в центр плоскости T_n, а вершины A_i – на плоскость T_n. Система дифференциальных уравнений поверхности X_n в репере R_1 имеет вид:
$$\omega^a = 0, \qquad \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a\, \omega^j. \tag{1}$$

Замыкая первую подсистему системы уравнений (I), получим $\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a$. Продолжая вторую подсистему, получим
$$\nabla \Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ijk}^a\, \omega^k.$$

С поверхностью X_n в репере R_1 ассоциируется главное расслоение $G_1(X_n)$ со структурными уравнениями
$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{2}$$
$$\mathcal{D}\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{3}$$
$$\mathcal{D}\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij}, \tag{4}$$
$$\mathcal{D}\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a,$$
$$\mathcal{D}\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i,$$
$$\mathcal{D}\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b,$$
где
$$\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j, \quad \omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a \omega_a,$$
$$\omega_{bi}^a = -\Lambda_{ij}^a \omega_b^j - \delta_b^a \omega_i, \quad \omega_{aj}^i = -\delta_j^i \omega_a.$$

Базой главного расслоения $G_1(X_n)$ является поверхность X_n, а типовым слоем-подгруппа стационарности $G_1 \subset GP(N,R)$ центрированной касательной плоскости T_n. Это расслоение содержит расслоение коаффинных реперов $H_1(X_n)$ со структурными уравнениями (2)-(4), типовой слой которого есть коаффинная группа $GA^*(n,R) \subset G_1$, действующая в центрированной касательной плоскости T_n.

Связность в главном расслоении $G_1(X_n)$ зададим с помощью поля объекта связности

$$\Gamma=(\Gamma^i_{jk},\Gamma_{ij},\Gamma^a_{bi},\Gamma^i_{aj},\Gamma_{ai})$$

на базе X_n:

$$\nabla\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jk\ell}\,\omega^\ell,$$
$$\nabla\Gamma_{ij}+\Gamma^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij}=\Gamma_{ijk}\,\omega^k,$$
$$\nabla\Gamma^a_{bi}+\omega^a_{bi}=\Gamma^a_{bij}\,\omega^j,$$
$$\nabla\Gamma^i_{aj}-\Gamma^i_{kj}\omega^k_a+\Gamma^b_{aj}\omega^i_b+\omega^i_{aj}=\Gamma^i_{ajk}\,\omega^k,$$
$$\nabla\Gamma_{ai}+\Gamma^b_{ai}\omega_b-\Gamma_{ji}\omega^j_a+\Gamma^j_{ai}\omega_j=\Gamma_{aij}\,\omega^j$$

Л е м м а I. Для задания связности в ассоциированном расслоении $G_1(X_n)$ достаточно к каждой касательной плоскости T_n присоединить: 1/ $(N-n-1)$-мерную плоскость P_{N-n-1}, не имеющую общих точек с касательной плоскостью T_n (плоскость Картана [13]); 2/ $(n-1)$-мерную плоскость P_{n-1}, принадлежащую касательной плоскости T_n и не проходящую через ее центр (нормаль второго рода в смысле А.П.Нордена).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскость Картана P_{N-n-1} зададим системой точек

$$B_a=A_a+\lambda^i_a A_i+\lambda_a A_o,$$

причем [5, с.245]

$$\nabla\lambda^i_a+\omega^i_a=\lambda^i_{aj}\,\omega^j, \qquad (5)$$
$$\nabla\lambda_a+\lambda^i_a\omega_i+\omega_a=\lambda_{ai}\,\omega^i.$$

Нормаль второго рода P_{n-1} [6] зададим системой точек

$$B_i=A_i+\lambda_i A_o,$$

причем

$$\nabla\lambda_i+\omega_i=\lambda_{ij}\,\omega^j.$$

Оснащение, указанное в лемме I, задается полем квазитензора $\lambda=(\lambda^i_a,\lambda_a,\lambda_i)$ на базе X_n. Фундаментальный тензор Λ^a_{ij} и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^i_{jk}=\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a-\delta^i_j\lambda_k-\delta^i_k\lambda_j, \qquad (6)$$
$$\Gamma_{ij}=\Lambda^a_{ij}\lambda_a-\lambda_i\lambda_j,$$
$$\Gamma^a_{bi}=-\Lambda^a_{ij}\lambda^j_b-\delta^a_b\lambda_i,$$
$$\Gamma^i_{aj}=\delta^i_j(\lambda^k_a\lambda_k-\lambda_a)-\Lambda^b_{jk}\lambda^k_a\lambda^i_b,$$
$$\Gamma_{ai}=\lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j-\Lambda^b_{ij}\lambda_b)-\lambda_a\lambda_i.$$

Л е м м а 2. Присоединение к каждой касательной плоскости T_n нормали первого рода в смысле А.П.Нордена позволяет определить оснащение Картана поверхности X_n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль первого рода P_{N-n} [6], пересекающую касательную плоскость T_n лишь в ее центре, зададим системой уравнений

$$x^i-\lambda^i_a x^a=0,$$

причем функции λ^i_a удовлетворяют уравнениям (5). Продолжая систему уравнений (5), получим

$$\nabla\lambda^i_{aj}-\lambda^i_b\omega^b_{aj}+\lambda^k_a\omega^i_{kj}+\omega^i_{aj}=\lambda^i_{ajk}\,\omega^k.$$

Фундаментальный тензор Λ^a_{ij} и квазитензор λ^i_a вместе со своим продолжением λ^i_{aj} позволяют охватить функции λ_a (которые вместе с квазитензором λ^i_a определяют плоскость Картана) по формулам:

$$\lambda_a = \frac{1}{n}\left(\Lambda^b_{ij}\lambda^i_a\lambda^j_b - \lambda^i_{ai}\right).$$

Т е о р е м а. Нормализация Нордена поверхности X_n позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_1(X_n)$.

З а м е ч а н и е I. Из формул (6) следует, что объект $\Gamma^i_{jk}\subset\Gamma$, который с точки зрения расслоенных пространств естественно называть объектом линейной связности [I4], охвачен симметричным образом. Для поверхности в аффинном пространстве охват объекта Γ^i_{jk} осуществлен Г.Ф.Лаптевым [7].

З а м е ч а н и е 2. Лемму 2 доказала Н.М.Остиану [5, с.257]. Геометрическая характеристика построенной плоскости Картана найдена Е.Т.Ивлевым [8]. Для поверхности, несущей сеть сопряженных линий, этот вопрос рассматривал М.А.Акивис [9].

З а м е ч а н и е 3. Л.С.Атанасян доказал теорему [I0, с.I6], аналогичную нашей, для многокомпонентного объекта связности другой природы.

§ 3. Обобщенная нормализация

В случае выполнения неравенства $N>\frac{1}{2}n(n+3)$ поверхность X_n проективного пространства P_N можно рассматривать с третьей точки зрения: как n-мерное многообразие пар плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$, обладающее свойствами: а/центрированная плоскость T_n принадлежит плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$; б/первая дифференциальная окрестность центра плоскости T_n принадлежит этой же плоскости; в/вторая дифференциальная окрестность центра плоскости T_n принадлежит плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$. Произведем специализацию подвижного репера $R_2=\{A_0, A_i, A_\alpha, A_u\}$, помещая вершину A_0 в центр плоскости T_n, вершины A_i – на плоскость T_n, вершины A_α – на плоскость $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$. Здесь и в дальнейшем новые индексы принимают значения:

$$\alpha,\beta,\gamma = n+1,\ldots,\frac{1}{2}n(n+3);\quad u,v,w=\frac{1}{2}n(n+3)+1,\ldots,N.$$

Система дифференциальных уравнений поверхности X_n в репере R_2 имеет вид:

$$\omega^\alpha = 0,\quad \omega^u=0,\quad \omega^u_i = 0, \tag{1}$$

$$\omega^\alpha_i = \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j,\quad \omega^u_\alpha = \Lambda^u_{\alpha i}\omega^i. \tag{2}$$

Замыкая систему уравнений (I), получим

$$\Lambda^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ji},\quad \Lambda^\alpha_{ij}\Lambda^u_{\alpha k} = \Lambda^\alpha_{ik}\Lambda^u_{\alpha j}.$$

Продолжая систему уравнений (2), получим

$$\nabla\Lambda^\alpha_{ij} = \Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k,\quad \nabla\Lambda^u_{\alpha i} = \Lambda^u_{\alpha ij}\omega^j,$$

причем дифференциальный оператор ∇ действует обычным образом:

$$\nabla\Lambda^u_{\alpha i} = d\Lambda^u_{\alpha i} - \Lambda^u_{\alpha j}\omega^j_i - \Lambda^u_{\beta i}\omega^\beta_\alpha + \Lambda^v_{\alpha i}\omega^u_v.$$

С поверхностью X_n в репере R_2 ассоциируется, в частности, главное расслоение $H_2(X_n)$ со структурными уравнениями

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j\wedge\omega^i_j,$$

$$\mathcal{D}\omega^i_j = \omega^k_j\wedge\omega^i_k + \omega^k\wedge\omega^i_{jk},$$

$$\mathcal{D}\omega_i = \omega^j_i\wedge\omega_j + \omega^j\wedge\omega_{ij},$$

$$\mathcal{D}\omega^\alpha_\beta = \omega^\gamma_\beta\wedge\omega^\alpha_\gamma + \omega^i\wedge\omega^\alpha_{\beta i},$$

$$\mathcal{D}\omega^i_\alpha = \omega^j_\alpha\wedge\omega^i_j + \omega^\beta_\alpha\wedge\omega^i_\beta + \omega^j\wedge\omega^i_{\alpha j},$$

$$\mathcal{D}\omega_\alpha = \omega^i_\alpha\wedge\omega_i + \omega^\beta_\alpha\wedge\omega_\beta + \omega^i\wedge\omega_{\alpha i},$$

где

$$\omega^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\omega^i_\alpha - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j,$$

$$\omega_{ij} = \Lambda^\alpha_{ij}\omega_\alpha,\quad \omega_{\alpha i} = \Lambda^u_{\alpha i}\omega_u,$$

$$\omega^\alpha_{\beta i} = \Lambda^u_{\beta i}\omega^\alpha_u - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j_\beta - \delta^\alpha_\beta\omega_i,$$

$$\omega^i_{\alpha j} = \Lambda^u_{\alpha j}\omega^i_u - \delta^i_j\omega_\alpha.$$

Базой главного расслоения $H_2(X_n)$ является поверхность X_n, а типовым слоем -группа $H_2\subset GP(N,R)$, действующая на паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$. Связность в главном расслоении $H_2(X_n)$ зададим с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = (\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^\alpha_{\beta i}, \Gamma^i_{\alpha j}, \Gamma_{\alpha i}),$$

компоненты которого удовлетворяют почти таким же уравнениям, как в §2 (лишь в последней системе уравнений добавляются формы $\omega_{\alpha i}$).

Л е м м а I. Для задания связности в ассоциированном расслоении $H_2(X_n)$ достаточно к каждой паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$ присоединить: а/нормаль второго рода

P_{n-1} в смысле А.П.Нордена; б/ $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$ -мерную плоскость $P_{\frac{1}{2}(n-1)(n+2)}$, принадлежащую соприкасающейся плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ и не имеющую общих точек с касательной плоскостью T_n; в/ $(N-\frac{1}{2}n(n+3)-1)$ -мерную плоскость $P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)-1}$, не имеющую общих точек с соприкасающейся плоскостью $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль второго рода P_{n-1} определяется квазитензором λ_i (см. §2). Плоскости, указанные в пунктах б, в зададим системами точек

$$B_\alpha = A_\alpha + \lambda^i_\alpha A_i + \lambda_\alpha A_o,$$

$$B_u = A_u + \lambda^\alpha_u A_\alpha + \lambda^i_u A_i + \lambda_u A_o,$$

причем

$$\nabla\lambda^i_\alpha + \omega^i_\alpha = \lambda^i_{\alpha j}\omega^j, \tag{3}$$

$$\nabla\lambda_\alpha + \lambda^i_\alpha\omega_i + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\omega^i.$$

$$\nabla\lambda^\alpha_u + \omega^\alpha_u = \lambda^\alpha_{ui}\omega^i, \tag{4}$$

$$\nabla\lambda^i_u + \lambda^\alpha_u\omega^i_\alpha + \omega^i_u = \lambda^i_{uj}\omega^j, \tag{5}$$

$$\nabla\lambda_u + \lambda^i_u\omega_i + \lambda^\alpha_u\omega_\alpha + \omega_u = \lambda_{ui}\omega^i.$$

Оснащение, указанное в лемме I, задается полем квазитензора

$$\lambda = (\lambda_i, \lambda^i_\alpha, \lambda_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u, \lambda_u)$$

на базе X_n. Фундаментальный объект $\Lambda = (\Lambda^\alpha_{ij}, \Lambda^u_{\alpha i})$ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^\alpha_{jk}\lambda^i_\alpha - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j,$$

$$\Gamma_{ij} = \Lambda^\alpha_{ij}\lambda_\alpha - \lambda_i\lambda_j,$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta i} = \Lambda^u_{\beta i}\lambda^\alpha_u - \Lambda^\alpha_{ij}\lambda^j_\beta - \delta^\alpha_\beta\lambda_i,$$

$$\Gamma^i_{\alpha j} = \Lambda^u_{\alpha j}\lambda^i_u - \delta^i_j(\lambda_\alpha - \lambda^k_\alpha\lambda_k) - \Lambda^\beta_{jk}\lambda^i_\beta\lambda^k_\alpha,$$

$$\Gamma_{\alpha i} = \Lambda^u_{\alpha i}\lambda_u - \lambda_i(\lambda_\alpha - \lambda^j_\alpha\lambda_j) - \Lambda^\beta_{ij}\lambda^j_\alpha\lambda_\beta.$$

О п р е д е л е н и е. Обобщенной нормализацией поверхности X_n назовем присоединение к каждой паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$ следующих геометрических образов: 1/нормали второго рода P_{n-1} в смысле А.П.Нордена; 2/$\frac{1}{2}n(n+1)$-мерной плоскости $P_{\frac{1}{2}n(n+1)}$, принадлежащей соприкасающейся плоскости $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ и пересекающей касательную плоскость T_n лишь в ее центре; 3/ $(N-\frac{1}{2}n(n+3))$-мерной плоскости $P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)}$, пересекающей соприкасающуюся плоскость $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ в той же точке.

Л е м м а 2. Обобщенная нормализация поверхности позволяет построить оснащение, указанное в лемме 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Плоскости, описанные в пунктах 2, 3 определения, зададим системами уравнений

$$x^u = 0, \quad x^i - \lambda^i_\alpha x^\alpha = 0;$$

$$x^\alpha - \lambda^\alpha_u x^u = 0, \quad x^i - \lambda^i_u x^u = 0,$$

причем функции λ^i_α, λ^α_u, λ^i_u удовлетворяют уравнениям (3),(4),(5) соответственно. Продолжая систему уравнений (3)-(5), получим

$$\nabla\lambda^i_{\alpha j} - \lambda^i_\beta\omega^\beta_{\alpha j} + \lambda^k_\alpha\omega^i_{kj} + \omega^i_{\alpha j} = \lambda^i_{\alpha jk}\omega^k,$$

$$\nabla\lambda^\alpha_{ui} + \lambda^\beta_u\omega^\alpha_{\beta i} - \lambda^\alpha_v\omega^v_{ui} - \Lambda^\alpha_{ij}\omega^j_u = \lambda^\alpha_{uij}\omega^j,$$

$$\nabla\lambda^i_{uj} + \lambda^k_u\omega^i_{kj} - \lambda^i_v\omega^v_{uj} + \lambda^\alpha_{uj}\omega^i_\alpha + \lambda^\alpha_u\omega^i_{\alpha j} - \delta^i_j\omega_u = \lambda^i_{ujk}\omega^k,$$

где

$$\omega^u_{vi} = -\delta^u_v\omega_i - \Lambda^u_{\alpha i}\omega^\alpha_v.$$

Обобщенная нормализация поверхности X_n задается полем квазитензора $\bar\lambda = (\lambda_i, \lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u)$ на базе X_n. Доказательство сводится к построению компонент λ_α, λ_u, которые в совокупности с нормализующим квазитензором $\bar\lambda$ образуют оснащающий квазитензор λ. Фундаментальный объект Λ и компоненты $\lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u$ нормализующего квазитензора вместе со своими продолжениями $\lambda^i_{\alpha j}, \lambda^\alpha_{ui}, \lambda^i_{uj}$ позволяют охватить компоненты λ_α, λ_u по формулам:

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{n}(\Lambda^u_{\alpha i}\mu^i_u + \Lambda^\beta_{ij}\lambda^j_\alpha\lambda^i_\beta - \lambda^i_{\alpha i}),$$

$$\lambda_u = \frac{1}{n}[\lambda^i_\alpha(\lambda^\alpha_{ui} + \Lambda^\alpha_{ij}\lambda^j_u) + \Lambda^v_{\alpha i}\lambda^\alpha_u\mu^i_v - \lambda^i_{ui}],$$

где

$$\mu^i_u = \lambda^i_u - \lambda^\alpha_u\lambda^i_\alpha.$$

Т е о р е м а. Обобщенная нормализация поверхности X_n позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $H_2(X_n)$.

П р е д л о ж е н и е. Обобщенную нормализацию поверхности X_n можно представить в другой геометрической форме, а именно, к каждой паре плоскостей $(T_n, T_{\frac{1}{2}n(n+3)})$

присоединять нормали первого и второго рода в смысле А.П. Нордена, а также нормаль третьего рода- $(N-\frac{1}{2}n(n+1))$-мерную плоскость $P_{N-\frac{1}{2}n(n+1)}$, пересекающую соприкасающуюся плоскость $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ по касательной плоскости T_n.

Доказательство. Нормали первого и второго рода зададим системами уравнений

$$x^i-\lambda^i_\alpha x^\alpha-\mu^i_u x^u=0, \quad x^\alpha-\lambda^\alpha_u x^u=0,$$

где функции λ^i_α, λ^α_u удовлетворяют уравнениям (3),(4), а функции μ^i_u —следующим уравнениям:

$$\nabla\mu^i_u-\lambda^i_\alpha\omega^\alpha_u+\omega^i_u=\mu^i_{uj}\omega^j.$$

Нормаль второго рода входит в обе формы обобщенной нормализации, поэтому в доказательстве не участвует.

Плоскости, указанные в пунктах 2,3 определения, и касательная плоскость T_n дают возможность построить нормали первого и третьего рода:

$$P_{N-n}=P_{\frac{1}{2}n(n+1)}\cup P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)},$$

$$P_{N-\frac{1}{2}n(n+1)}=P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)}\cup T_n.$$

Обратно, нормали первого и третьего рода вместе с соприкасающейся плоскостью $T_{\frac{1}{2}n(n+3)}$ дают

$$P_{\frac{1}{2}n(n+1)}=P_{N-n}\cap T_{\frac{1}{2}n(n+3)},$$

$$P_{N-\frac{1}{2}n(n+3)}=P_{N-n}\cap P_{N-\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

Аналитически эквивалентность двух форм обобщенной нормализации обосновывается подобием геометрических

объектов $(\lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \lambda^i_u)$, $(\lambda^i_\alpha, \lambda^\alpha_u, \mu^i_u)$.

Список литературы

1. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр.Моск.матем.о-ва", т.2, 1953, с.275-382.

2. Лумисте Ю.Г. Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях. "Уч.зап.Тартуск.ун-та", вып.177, 1965, с.6-41.

3. Лаптев Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства. "Тр.4-го Всесоюзн.матем.съезда", 1961, т.2, Л., "Наука", 1964, с.226-233.

4. Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева. "Тр.Геом.семинара", т.4, М., 1973, с.7-68.

5. Остиану Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства. "Тр.Геом.семинара", т.1, М., 1966, с.239-263.

6. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.-Л., Гостехиздат, 1950.

7. Лаптев Г.Ф. Об инвариантном оснащении поверхности в пространстве аффинной связности. ДАН СССР, 1959, т.126, №3, с.409-413.

8. Ивлев Е.Т. О многообразии $E(o, n-m, m)$ в n-мерном проективном пространстве P_n $(m>2, n>m(m+1))$. "Сибирский матем.журнал", 1967, т.8, №5, с.1143-1155.

9. Акивис М.А. Об инвариантном оснащении поверхности, несущей сеть сопряженных линий. "Уч.зап.МГПИ им.В.И.Ленина", №374, т.1, 1970, с.18-27.

10. Атанасян Л.С. К теории оснащенных поверхностей многомерного проективного пространства. "Уч.зап.МГПИ им. В.И.Ленина", т.108, вып.2, 1957, с.3-44.

11. Cattaneo – Gasparini J. Sulle connessioni infinitesimali nello spazio fibrato dei riferimenti affini di una V_n. Rend. mat. e applic., 17, № 3-4, 1958, 327-404.

12. Bortolotti E. Connessioni nelle varieta luogo di spazi. Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1933, 3, 81-89.

13. Cartan E. Les espaces a connexion projective. Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу, 1937, 4, 147-159.

14. Legrand G. Connexions infinitesimales definies sur l'espace fibre des reperes affines d'une variete differentiable. C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 6, 586-588.

С е м и н а р
по дифференциальной геометрии многообразий фигур при
Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 26 мая 1976 года.

Ниже приводится план работы семинара с 13 октября 1976 года по 25 мая 1977 года.

13.10.1976г.В.С.М а л а х о в с к и й.Группы Ли,порожденные фигурами однородного пространства.

20.10.1976г.Е.А.Х л я п о в а.Конгруэнции оснащенных квадратичных элементов в n-мерном аффинном пространстве.

27.10.1976г.Л.Г.К о р с а к о в а.О некоторых характеристиках расслояемых пар конгруэнций фигур.

3.11.1976г.Ю.И.П о п о в.О полях геометрических объектов многомерной распадающейся гиперполосы проективного пространства.

10.11.1976г.Т.П.Ф у н т и к о в а.Безынтегральное представление одного класса вырожденных конгруэнций.

17.11.1976г.Е.В.С к р ы д л о в а.О вырожденных конгруэнциях,порожденных кривой второго порядка и точкой.

24.11.1976г.Ю.И.Ш е в ч е н к о.Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства.

1.12.1976г.Г.П.Т к а ч.Об одном классе многообразий пар фигур в A_3.

8.12.1976г.В.Н.Х у д е н к о.О многообразиях многомерных квадрик в проективном пространстве.

15.12.1976г.В.С.М а л а х о в с к и й.Поверхности,нормали которых ортогонально пересекают линию.

22.12.1976г.Е.А.М и т р о ф а н о в а.Об одном классе конгруэнций гиперболических параболоидов в трехмерном эквиаффинном пространстве.